Αρχή του Cavalieri:

Έστω $M \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-Μετρήσιμο με

α. Το M είναι μεταξύ των (υπερεπιπέδων) $x_1 = a$ & $x_1 = b$. (δηλ. $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in M$ $a \leq x \leq b$).

β. $\forall \xi \in [a,b]$ η τομή του $x_1 = \xi$ με το M είναι Jordan-Μετρήσιμο με $(n-1)$-διάστατο περιεχόμενο $q(\xi) \rightsquigarrow$ η $q : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη με $V(M) = \int_a^b q(\xi)\, d\xi$.

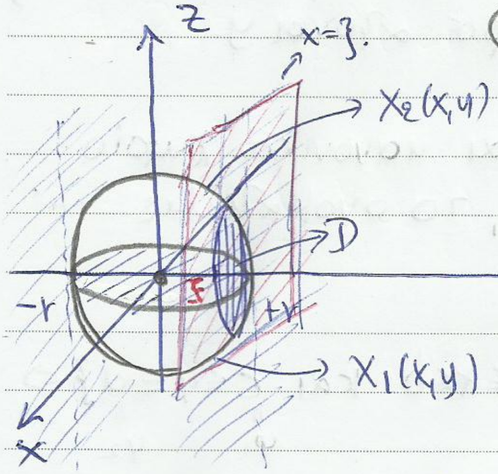
Παράδειγμα: Θέλουμε να υπολογίσουμε τον όγκο της τρισδιάστατης μπάλας (στον $\mathbb{R}^3$) κέντρου $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ και ακτίνας $r > 0$.

Έστω, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \leq r^2\} =$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq r\} \text{ και}$$

$$z_0 - \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2} \leq z \leq z_0 + \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\}$$

Αρχη του Cavalieri: (α) Η μπάλα Μ βρίσκεται μεταξύ των $x=x_0-r$ και $x=x_0+r$ (αφού $\forall (x,y,z)\in M: (x-x_0)^2\le r^2$)



(β) Η τομή του επιπέδου $x=\xi\in[x_0-r,x_0+r]$ είναι το σύνολο $Q(\xi)=$

$$=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2: (y-y_0)^2+(z-z_0)^2\le r^2-(\xi-x_0)^2\}$$

$$q(\xi)=V(Q(\xi))=\pi\left(r^2-(\xi-x_0)^2\right)$$

↓

Ακτίνα του $Q(\xi)$ στο τετράγωνο

$$\underset{\text{Cavalieri}}{\Longrightarrow}\quad V(M)=\int_{x_0-r}^{x_0+r}\underbrace{V(Q(\xi))}_{q(\xi)}\,d\xi$$

όπου, $q(\xi)=r^2-(\xi-x_0)^2$

Αρα,

$$V(M)=\frac{4\pi}{3}r^3.$$

Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού του V(M) (όπου Μ η μπάλα παραπάνω)

$$V(M)=\int_D \left(x_2(x,y)-x_1(x,y)\right)d(x,y)$$

όπου $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r^2\}$

και $x_2(x,y)=z_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}$

$x_1(x,y)=z_0-\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}$.

Πως όμως υπολογίζεται το $\int 2\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}\,d(x,y)$

από Θ. Αλλαγής Μεταβλητής σε πολικές συντεταγμένες

Τα προηγούμενα Θεωρήματα (τρόποι υπολογισμού) αφορούν και εφαρμόζονται κυρίως σε κανονικά χωρία

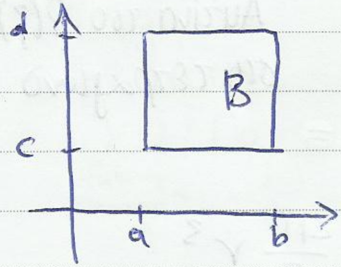
Ορισμός: Αν $\varphi_1,\varphi_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς με $\varphi_1\le\varphi_2$ το $B\subseteq\mathbb{R}^2$, $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le z\le\varphi_2(x)\}$ ονομάζεται κανονικό χωρίο ως προς άξονα x

Αντίστοιχα, αν $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ συνεχείς με $\psi_1 \le \psi_2$ το $G \subseteq \mathbb{R}^2$, $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d \, , \, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$ ονομάζεται κανονικό χωρίο ως προς άξονα y.

~~Ορισμός:~~

~~Αν κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ είναι κανονικό χωρίο ως προς τον y και x άξονα, το ονομάζουμε~~

Πχ



$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \text{ και } \underset{\psi_1}{\underset{\shortparallel}{c}} \le y \le \underset{\psi_2}{\underset{\shortparallel}{d}}\}$$

ή ισοδύναμα:

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d \text{ και } \underset{\psi_1}{\underset{\shortparallel}{a}} \le x \le \underset{\psi_2}{\underset{\shortparallel}{b}}\}$$